平 成 31 年 度 入 学 試 験 問 題（前期）

数　　　学

注　　意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机上に出しておくこと。

数　学（前　期）

〔１〕 $\triangle$ABCは，３辺の長さ BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$ が整数で $\angle \mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$ を満たすとする。

(1) $ab = 21$ を満たすような $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

(2) $a + b + c = \dfrac{bc}{2}$ を満たすような $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

〔２〕

(1) $t \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{t^2}{2} < e^t$ を示せ。

(2) 実数 c に対して，直線 $y = c$ と関数 $y = (x^2 - 1)e^{-x^2}$ のグラフとの共有点の個数を求めよ。

〔３〕 さいころを４回投げて出た目をそれぞれ Z_1，Z'_1，Z_2，Z'_2 とし，$X_i\ (i = 1,\ 2)$ を次のように定義する。

$$X_i = \begin{cases} Z_i & (Z_i \geqq 4 \text{ のとき}) \\ Z_i + Z'_i & (Z_i \leqq 3,\ Z_i + Z'_i \leqq 6 \text{ のとき}) \\ 6 & (Z_i \leqq 3,\ Z_i + Z'_i > 6 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(1) X_1 がとりうる値とそれぞれの確率を求めよ。

(2) $Z_1 = 1$ のとき，$X_1 + X_2 = 6$ である条件付き確率を求めよ。

(3) $X_1 + X_2 = 6$ のとき，$Z_1 = 1$ である条件付き確率を求めよ。

〔４〕

(1) A，O を AO $= 1$ を満たす平面の定点とし，C を O を中心とする半径 $a\ (a < 1)$ の円とする。点 P が，

条件：線分 AP と円 C との共有点が P のみである

を満たすように C 上を動くとき，線分 AP の長さの最大値と最小値を求めよ。

(2) A，O を AO $= 1$ を満たす空間の定点とし，S を O を中心とする半径 $a\ (a < 1)$ の球面とする。S 上の点 P で，

条件：線分 AP と球面 S との共有点が P のみである

を満たすものを考えて，すべての P に対する線分 AP の和集合を K とする。K の体積 V を求めよ。

〔５〕 i を虚数単位とし，複素数 z に対し，$\bar{z}$，$\arg z$ をそれぞれ z の複素共役，偏角とする。

(1) $|w_1| = |w_2| = 1$ である複素数 w_1，w_2 に対し $\theta = \arg \dfrac{w_1}{w_2}$ とするとき，$|w_1 - w_2| = 2\left|\sin \dfrac{\theta}{2}\right|$ を示せ。

(2) $\alpha = -1$，$\beta = \dfrac{1 + \sqrt{3}\,i}{2}$，$\gamma = \bar{\beta}$ とする。複素数 z が $|z| = 1$ を満たすように動くとき，$|z - \alpha| + |z - \beta| + |z - \gamma|$ の最大値と最小値を求めよ。